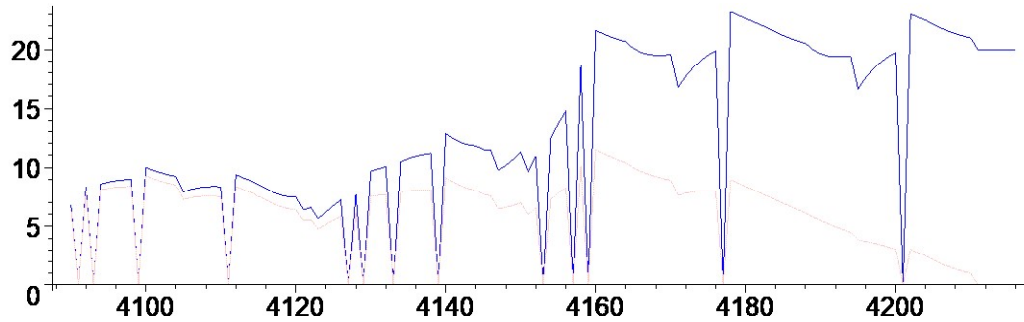


```

[ > restart; read `G:/My Drive/MyNote/Talks/25.5 DRZ75/Primes.txt`;
[ >
[ > # Section 1: Introduction
[ > seq(isprime(70010+i),i=0..6);
                                false,false,false,false,false,false
[ > # Computation in the introduction section
[ > Digits:=1025:
[ > A:= EPrime(0,70010,0.);
A := 2.4284979136935042303660819062422992716342018313447118266468959211216521323257379860460932705658054\
8524160047589165194841516565634336164772565943485751201004731405358841408026826513376522768576527368034\
3136681232417851326056596686947409855553312451011323797701336616802608661530680513462600338554861555274\
8670772033743828142893635968820059123417686546040938389237587262019318687321289858489108100887189200924\
0571795609351924253153205397373837440242279091857017672442131002113033192835516721747284145504228191441\
1910382445736855406915179125563593441380375182591557740514628378865628250017304748605574867505254863249\
4514231881019694060148320180956321978618775585115678985399654513031954764655112873299739474517545573277\
8419178214070626762328228358649945689219084419782406500153429522671728320326784872972218052322448914540\
2769495359280906084323077864236944937185738590229417054050669573798475404397227733027214107066567162051\
134072342778501095530910252018791802120611559260781276302696815828196768900528693449929588792250205464
[ > B := EPrime(0,70010,407.);
B := 2.4284979136935042303660819062422992716342018313447118266468959211216521323257379860460932705658054\
8524160047589165194841516565634336164772565943485751201004731405358841408026826513376522768576527368034\
3136681232417851326056596686947409855553312451011323797701336616802608661530680513462600338554861555274\
8670772033743828142893635968820059123417686546040938389237587262019318687321289858489108100887189200924\
0571795609351924253153205397373837440242279091857017672442131002113033192835516721747284145504228191441\
1910382445736855406915179125563593441380375182591557740514628378865628250017304748605574867505254863249\
4514231881019694060148320180956321978618775585115678985399654513031954764655112873299739474517545573277\
8419178214070626762328228358649945689219084419782406500153429522671728320326784872972218052322448914540\
2769495359280906084323077864236944937185738590229417054050669573798475404397227733027214107066567162051\
134072342778501095530910252018791802120611559260781276302696815828196768900528750789018843445989815909
[ > B-A;
                                0.57339089254653739610445 10-1001
[ >
[ > # Section 2: Structure Theorem
[ > # Survival Probability from Eq(3)
[ > {seq(ProbPrime(0,70010+i),i=0..5)};
{0.14088228318096741919028402121596660047733996631480345469312847335919993986447389302852327260059479036\
1105714214769713678370323090131462739891913436086827820257143378449502525667684448940341033947359931754\
0395895638843954532602032168779399277327435094434362332669014997480387471010211058962140684411627501141\
2274771922706427054767873733712834807304554296914179059075075927504447223404840286296742664385786575513\
0822616331558900987240596653728786332503005688938474575977945415949197697726936160836654600560449418008\
2494945527660295591747250553731472644251810701530814145806380357067540995560088424806016655589151752659\
4711465379798697784531452480734140068901563555883419184455921937215447443552328279382348155630060474780\
0279108628544197399201339632391659927131442576084791142566760298209160184715253564112538680032908043430\
0393437519266068306988704025267978470434007051518732013995224392388255594663607237840728895763779688821\
5322782419182482987163099221383349587492256187152996595409135962238582024634553987141941618913999013
10-1003}
[ >
[ > # Demonstrate Theorem on Structure Theorem
[ > Digits:=10:
[ > A:= [seq(EPrime(s,4210,0.),s=4090..4216)]:
[ > R1 := plot([seq(s,s=4090..4216)],A,color=pink):
[

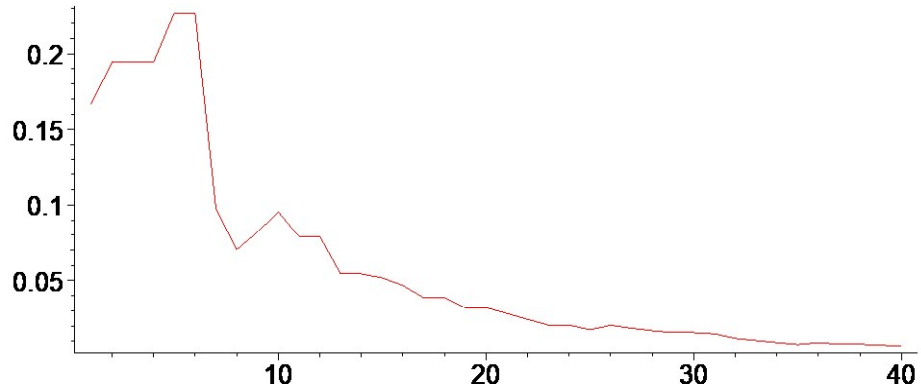
```

```
[ > B:= [seq(EPrime(s,4210,20.),s=4090..4216)]:
[ > R2 := plot( [seq(s,s=4090..4216)],B,color=blue) :
[ > plots[display] ([R1,R2]) ;
```

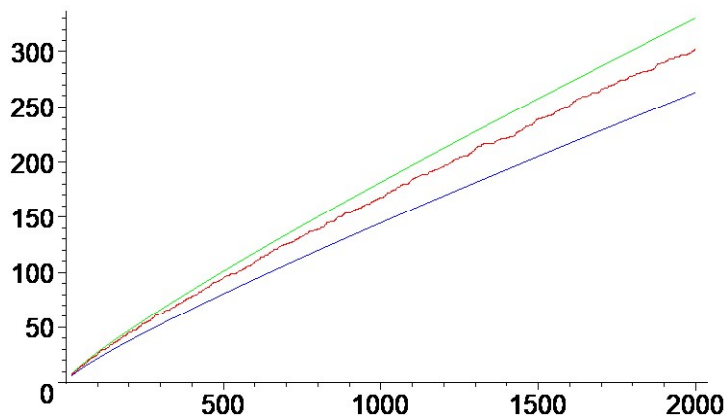


```
[ >
[ >
[ >
[ > # Section 3: Rigorous Upper Bound U for Primes
[ >
```

```
[ > # Landing Probability
[ > A:= [seq(ProbR(0,n),n=1..40)]:
[ > plot( [seq(n,n=1..40)],A) ;
```



```
[ >
[ > # Quantitative Prime Number Theorem
[ > N:=2000:
[ > A:= [seq(pi(n),n=17..N)]:
[ > R1:=plot( [seq(n,n=17..N)],A) :
[ > B:= [seq(x/log(x),x=17..N)]:
[ > R2:=plot( [seq(n,n=17..N)],B,color=blue) :
[ > C:= [seq(1.25506*x/log(x),x=17..N)]:
[ > R3:=plot( [seq(n,n=17..N)],C,color=green) :
[ > plots[display] ([R1,R2,R3]) ;
```



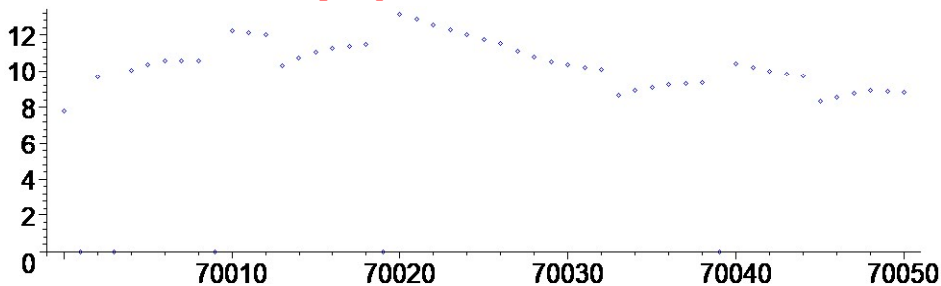
```
[ >
> # Test Proposition about bound on R_N(n).
L:=200:P:=300:
A:=[seq(evalf(ProbR(80000,80000+i)),i=L..P)]:
R1 := plot([seq(i,i=L..P)],A):
B:=[seq(evalf(1/32*(5/6)^(pi(80000+i-1)-pi(80000))),i=L..P)]:
R2 := plot([seq(i,i=L..P)],B,color=blue):
plots[display]([R1,R2]);
```

```
[ >
> # The upper bound U computation with N=70010
Digits:=20: N:=70010:
add( evalf((ithprime(i)-N)*(5/6)^(i-6939)),i=6939..9593);
evalf(int((x+1-N)*(5/6)^(x/log(x)-1.25506*N/ln(N) )
,x=100002..infinity ));
```

406.98082055456595998
0.14794504288005573213 10⁻⁵⁷

```
[ > ithprime(6938); ithprime(9593);
70009
100003
```

```
[ >
> # Plot E[tau_s] with N=100000 and B=0. in figure 3
> Digits:=20:
> A:=[seq( EPrime(s,100000,0.),s=70000..70050)]:
> plot([seq(s,s=70000..70050)],A,style=point,color=blue);
```



```
[ >
>
>
> # Section 4: Higher Moments
> # Straight second moment with L=0
> Digits:=200: #Note that the tail end of these numbers will be off from the round off
errors.
> BL2 := E2NoMem(0,72000,[0.,0.]);
BL2 := 12.14038078509277803704442588975179071670687740762333581697239549940658042655328127271248568350772
2455300128195392931026215711370809567979075490085018403652932930395452520883445618549742235046809455476
> BL3 := E3NoMem(0,72000,[0.,0.,0.]);
```

```

BL3 := 112.6876397546569557440733688945276499594239506211770251182677570731320921339343498976380309173433\
3741298421400461312440678864311524161177073508532263063752554519367578751407700652215205292129517637098
> BL4 := E4NoMem(0,72000,[0.,0.,0.,0.]);
BL4 := 1573.062088873773656629766311656284995093724703295686336523625561247397354962857450625836637886456\
3796456773485012510298503089114320643984054246625732453956093392663381373051851571591461545470116793371
[ >
[ > # Formally calculate the variance
[ > ithprime(7129); ithprime(9593);
                                     72019
                                     100003
[ > Digits:=20; N:=72000:
add( evalf((ithprime(i)-N)^2*(5/6)^(i-7129)),i=7129..9593);
evalf(int((x+1-N)^2*(5/6)^(x/log(x)-1.25506*N/ln(N) )
,x=100002..infinity ));
                                     47003.375964582648899
                                     0.51007622692230476230 10-37
[ > U := 47004;
                                     U := 47004
[ > Digits:=1200:
[ > VarPrime(0,72000,[0.,0.],[412.,47004.]);
"Upper bound of variance", 6.24277866827907531536207550162316820859170705225404294792974833539180268504308429\
6344217404858324926159539897268356048076272651677541964219102239023753815082312980516933797769737663575\
9276289142038450086336595557647986480561330821471361548850264884100877824230497707068051249134279912379\
0001786470816288522461548813917545759417480058396282285918022954970098109901175238450162827656943766713\
0668703455777340464400316579625200239233568573212269240699608765249809832674880532121196886621726872771\
2447140198638594925311088612207957345581835586570323139252147022310745962554234331617808879953920056306\
945586560222171296832425822580676336343147488874838134977214706359567201799753884888597376068262952172\
9082075511654956370295989037939607882007647348424182443178365606913989830493801999271954005282246496563\
8384707981590610477865874838598623919718881489138788698837531524981369902424753167953880720908467872203\
812635188085425254755609125356008575833460146935581856519593643587600469465729161656266565526996490818\
3020896592275545403116996054485958386352987496831839158790270299285875128728106467854194096888355898080\
81481520827058557803180635859571746496307313594607699190922902819607556187080443772845562
"Lower bound of variance", 6.24277866827907531536207550162316820859170705225404294792974833539180268504308429\
6344217404858324926159539897268356048076272651677541964219102239023753815082312980516933797769737663575\
9276289142038450086336595557647986480561330821471361548850264884100877824230497707068051249134279912379\
0001786470816288522461548813917545759417480058396282285918022954970098109901175238450162827656943766713\
0668703455777340464400316579625200239233568573212269240699608765249809832674880532121196886621726872771\
2447140198638594925311088612207957345581835586570323139252147022310745962554234331617808879953920056306\
945586560222171296832425822580676336343147488874838134977214706359567201799753884888597376068262952172\
9082075511654956370295989037939607882007647348424182443178365606913989830493801999271954005282246496563\
8384707981590610477865874838598623919718881489138788698837531524981369902424753167953880720908467872203\
812635188085425254755609125356008575833460146935581856519593643587600469465729161656266565526996490818\
3020896592275545350021874467031845000892281048040828763635380842514719175829225854426122520719744478040\
50984608779809249503167031138126365820647659207443221583153800258447682501303456273195095
                                     "Their difference is"
0.530951215874541133854607064487910103951548894567711559528988806134280715761686114200403049691204724930\
8300013604721445380675659654387164477607769102561159873685776987499650467 10-1024
[ >
[ > # Formally calculate the third moment about the mean
[ > Digits:=20; N:=72000:
add( evalf((ithprime(i)-N)^3*(5/6)^(i-7129)),i=7129..9593);

```

```
evalf(int((x+1-N)^3*(5/6)^(x/log(x)-1.25506*N/ln(N))
,x=100002..infinity));
```

```
0.82777852528609986506 107
0.14319115936925768287 10-32
```

```
> U:=8277786;
```

```
U := 8277786
```

```
> Digits:=1200:
```

```
> MoMean3(0,72000,[0.,0.,0.],[412.,47004.,8277786.]);
```

```
"Upper bound of E[(X-mu)^3]", 52.883600403482343095787225557797022461936541779671348157093675193501650386139\
4479175933771804558493213987313115444221957048069741674467542459333751314782049453697177205586850961424\
4471050813349690033143802114060469354621645086822136564882427522623789054616593911344948286714877399788\
9139427885929138679550467666300541520627453660519102728211468734094965121144573901245549645653282202678\
7090741641310810933691942816720802610622554680649730888668416727320373523188711341839174286791333285527\
2230104489570718476098227347581950437315884904398856496822264035562778304372872560559852418421397820368\
9786960271952029605794031956449418537122437391714117490312329125814264739951527074572709726478862582867\
1093798475635945832655689891802450838995989296681559877018413284582956615164612981736849837554158698822\
9690962415016247497691611829175641949331341543741088410463046780735564185535099732811122839050073905468\
9678360330389242373438187831041927421532128022707650113039732858921437817826906654065644389761163137832\
8575306051448394040338856912762746998307344642236620810021477064645274034581393964786741730348149635170\
618643308508964719969351708852022008144725407547394638423946671596665251164556058740736084063
```

```
"Lower bound of E[(X-mu)^3]", 52.883600403482343095787225557797022461936541779671348157093675193501650386139\
4479175933771804558493213987313115444221957048069741674467542459333751314782049453697177205586850961424\
4471050813349690033143802114060469354621645086822136564882427522623789054616593911344948286714877399788\
9139427885929138679550467666300541520627453660519102728211468734094965121144573901245549645653282202678\
7090741641310810933691942816720802610622554680649730888668416727320373523188711341839174286791333285527\
2230104489570718476098227347581950437315884904398856496822264035562778304372872560559852418421397820368\
9786960271952029605794031956449418537122437391714117490312329125814264739951527074572709726478862582867\
1093798475635945832655689891802450838995989296681559877018413284582956615164612981736849837554158698822\
9690962415016247497691611829175641949331341543741088410463046780735564185535099732811122839050073905468\
9678360330389242373438187831041927421532128022707650113039732858921437817826906654065644389761163137832\
8575306051448394024478243114198576380584075149565419239866905511879593435966976025216038449596129025763\
402977330664652989076676788366499458319838965818095195438513280492208279784957228501007891219
```

```
"Their difference is"
```

```
0.158606137985641706177232694926712015701545715527656805986144179395707032807520206094072156659778443117\
30892674920485522549824886441729299442985433391104456971379598830239728192844 10-1019
```

```
>
```

```
> # Formally calculate the fourth moment about the mean
```

```
> Digits:=20: N:=72000:
```

```
>
```

```
> add( evalf((ithprime(i)-N)^4*(5/6)^(i-7129)),i=7129..9593);
evalf(int((x+1-N)^4*(5/6)^(x/log(x)-1.25506*N/ln(N))
,x=100002..infinity));
```

```
0.20249155629096917601 1010
0.40197587595483124273 10-28
```

```
> U:=2024915563;
```

```
U := 2024915563
```

```
> Digits:=1200:
```

```
> MoMean4(0,72000,[0.,0.,0.,0.],[412.,47004.,8277786.,2024915563.]);
```

```
"Upper bound of E[(X-mu)^4]", 803.66497701864425852778023577515897711148670589909491234675533352114130305316\
4904564682389072904067436647298938915678526029709253035542782239314615464681001597201860417836093946709
```

9948604670755688906956820399783724152325822584801614056411133117879327010803644244155222855027365467546
3756221011583255223905470255385070804238157861152130976686295486254955045732854031273062272821931174768
9602015832145231992489058556013272233517387104838335527064756256404960073262474429669610565500949303750
7663291815084986512093693928532377982155717443048420078271579450657660483383744414832750442616240172774
2308564892959148449481066482160743100731503750666759433141975034636661954837799840473550723427475646512
5312756151565343701310811564101514371010003978191447266779143218542031747243806206286521459390292640851
1467472848704615874027696648744804661319431938092872137326850890133059754135485524072240146174938116279
2428139515598263497933299873969178156603281580197440525860391868042490809153137760833932214256504295344
5334023342175500031670847503055775065704619062285827752625428729622864183662996092277322178710611322926
131448615047932370693826102502385194009589124829402299734143969893898918435426430852065422308

"Lower bound of $E[(X-\mu)^4]$ ", 803.66497701864425852778023577515897711148670589909491234675533352114130305316
4904564682389072904067436647298938915678526029709253035542782239314615464681001597201860417836093946709
9948604670755688906956820399783724152325822584801614056411133117879327010803644244155222855027365467546
3756221011583255223905470255385070804238157861152130976686295486254955045732854031273062272821931174768
9602015832145231992489058556013272233517387104838335527064756256404960073262474429669610565500949303750
7663291815084986512093693928532377982155717443048420078271579450657660483383744414832750442616240172774
2308564892959148449481066482160743100731503750666759433141975034636661954837799840473550723427475646512
5312756151565343701310811564101514371010003978191447266779143218542031747243806206286521459390292640851
1467472848704615874027696648744804661319431938092872137326850890133059754135485524072240146174938116279
2428139515598263497933299873969178156603281580197440525860391868042490809153137760833932214256504295344
5334023342175457916229007387647074568524553479771423324184230734276776613654601901117547220267886076957
416130112559186902079190984108594311358266379822831984031638517171675031516827490577754785466

"Their difference is"

0.421154418401154087004971800655825144044284411979953460875700083941911597749584427252459687153185024887
4546861463511839379088265132274500657031570250545272223886918598940274310636842 10⁻¹⁰¹⁵

[>
[>